Ни одна из этих схем не использовалась для решения уравнения переноса вихря, но Веронис [1968] применил схему (3.305) для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Он обнаружил, что при «оптимальном» выборе Δt для достижения сходимости достаточно взять $k = 3$. (Однако устойчивость схемы существенно улучшается только при больших значениях k.)

Трехслойная двухшаговая схема, предложенная Курихарой [1965] (см. также Полджер [1971]), обладает некоторыми интересными свойствами. В случае уравнения для невязкой жидкости ее можно записать в следующем виде:

$$\zeta^{\overline{n+1}} = \zeta^{n-1} - 2u\,\Delta t\,\frac{\delta\zeta^n}{\delta x}, \tag{3.306а}$$

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - \frac{1}{2}u\,\Delta t\left[\frac{\delta\zeta^n}{\delta x} + \frac{\delta\zeta^{\overline{n+1}}}{\delta x}\right]. \tag{3.306б}$$

Первый шаг есть не что иное, как предиктор по схеме «чехарда», а второй — схема (3.285). Данная схема обладает некоторыми интересными характеристиками (см. задачу 3.16). Подобно схеме «чехарда», она имеет ошибку второго порядка $E = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$; исследование устойчивости методом фон Неймана показывает, что $|\lambda| = 1$ при $C \leqslant 1$, и схема имеет нулевую схемную вязкость как в нестационарном, так и в стационарном случаях. Она также обладает недостатками, присущими схеме «чехарда», т. е. требует дополнительных условий на выходной границе потока и дополнительных начальных условий и фурье-компонента с длиной волны $\Lambda = 2\Delta x$ стационарна. В отличие от схемы «чехарда» она обладает еще и тем недостатком, что не дает точного решения модельного уравнения при $C = 1$; однако значительным преимуществом рассматриваемой схемы является отсутствие неустойчивости, связанной с расчленением решения по временны́м шагам.

3.1.16. Неявные схемы метода чередующихся направлений

Неявные схемы метода чередующихся направлений (схемы ADI) были предложены в работах Писмена, Ракфорда [1955] и Дугласа [1955]. Называемая также схемой переменных направлений (Кускова [1968]), эта схема основана на расщеплении шага по времени с целью построения многомерной неявной схемы, в которой требуется обращение только трехдиагональной матрицы[1]). Первые приложения этой схемы к задачам

[1]) Н. Н. Яненко [1967] разработал метод дробных шагов, в котором многомерное уравнение расщепляется на последовательность одномерных уравнений; первые результаты он опубликовал в ДАН СССР, 1959, т. 125, № 6. Метод расщепления был также развит советскими математиками

гидродинамики дали Уилкс и Черчилл [1966], Сэмюелс и Черчилл [1967], Пирсон[1]) [1964, 1965а, 1965б], Азиз и Хеллумс [1967]. В настоящее время неявные схемы чередующихся направлений — наиболее распространенные схемы для задач с учетом вязкости.

Для линеаризованной задачи неявную схему метода чередующихся направлений Писмена и Ракфорда можно представить в следующем виде. Обозначим через $\delta\zeta/\delta x$ и $\delta^2\zeta/\delta x^2$ аппроксимации с центральными разностями для $\partial\zeta/\partial x$ и $\partial^2\zeta/\partial x^2$ в точке i. Интегрирование по времени на интервале Δt уравнения, включающего конвективные и диффузионные члены,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}, \tag{3.307}$$

осуществляется за два следующих шага:

$$\frac{\zeta^{n+1/2} - \zeta^n}{\Delta t/2} = -u\frac{\delta\zeta^{n+1/2}}{\delta x} - v\frac{\delta\zeta^n}{\delta y} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^{n+1/2}}{\delta x^2} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^n}{\delta y^2}, \tag{3.308а}$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^{n+1/2}}{\Delta t/2} = -u\frac{\delta\zeta^{n+1/2}}{\delta x} - v\frac{\delta\zeta^{n+1}}{\delta y} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^{n+1/2}}{\delta x^2} + \alpha\frac{\delta^2\zeta^{n+1}}{\delta y^2} \tag{3.308б}$$

(x и y можно поменять ролями).

Преимущество этого подхода по сравнению с полностью неявными схемами заключается в том, что в рассматриваемой схеме каждое разностное уравнение, хотя и неявное, имеет только трехдиагональную матрицу. Уравнение (3.308а) содержит неявные неизвестные $\zeta_{i,j}^{n+1/2}$, $\zeta_{i\pm1,j}^{n+1/2}$. Уравнение (3.308б) содержит неявные неизвестные $\zeta_{i,j}^{n+1}$, $\zeta_{i,j\pm1}^{n+1}$. Эта двумерная схема абсолютно устойчива, как и полностью неявная схема (уравнения (3.258) или (3.263)). Но в данной схеме требуется решать только трехдиагональную систему (см. приложение А), которая для обычных неявных схем имеет место лишь в одномерном случае. (Другой недостаток неявных схем, связанный с бесконечной скоростью распространения возмущения для конвектив-

Е. Г. Дьяконовым, Г. И. Марчуком, А. А. Самарским, В. К. Саульевым. Одно из первых применений метода расщепления к многомерной гидродинамике было дано К. А. Багриновским и С. К. Годуновым в статье, опубликованной в ДАН СССР, 1957, т. 115, № 3. — *Прим. ред.*

[1]) Пирсон [1964] показал, что конвективные члены не меняют безусловной устойчивости этой схемы, как и в случае полностью неявной схемы. Однако Хаустон и де Бремекер [1974] утверждают, что собственные функции, использованные Пирсоном, правильны только тогда, когда конвективные члены малы, и поэтому его доказательству нехватает общности. Легко убедиться в том, что требуемая здесь малость измеряется, как и можно было предполагать, условием для сеточного числа Рейнольдса $Re_c \leqslant 2$.

ного члена, сохраняется и в неявных схемах метода чередующихся направлений.)

Кроме того, рассматриваемая схема, примененная к линейному уравнению, имеет формальную ошибку порядка $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$. Для того чтобы убедиться в том, что схема действительно имеет второй порядок точности по времени (это на первый взгляд не очевидно), нужно выписать отдельно вклады от производных по переменным x и y. Пренебрегая зависимостью от y, уравнение (3.308) можно записать в форме

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^{n}}{\Delta t} = -u\,\frac{\delta\zeta^{n+1/2}}{\delta x} + \alpha\,\frac{\delta^2\zeta^{n+1/2}}{\delta x^2}, \tag{3.309}$$

которая, очевидно, имеет порядок $O(\Delta t^2)$. Аналогично, пренебрегая в уравнении (3.308) зависимостью от x, получаем форму

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^{n}}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\,v\left[\frac{\delta\zeta^{n}}{\delta y} + \frac{\delta\zeta^{n+1}}{\delta y}\right] + \frac{1}{2}\,\alpha\left[\frac{\delta^2\zeta^{n}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\zeta^{n+1}}{\delta y^2}\right], \tag{3.310}$$

которая также, очевидно, имеет порядок $O(\Delta t^2)$. Второй порядок точности, аппроксимация и сходимость данной схемы в применении к уравнению диффузии для прямоугольных и непрямоугольных областей были формально показаны Дугласом [1955, 1957].

Второй порядок точности схемы может быть нарушен нелинейными членами, которые соответственно должны вычисляться как $u^{n+1/2}$, v^{n} в уравнении (3.308а) и как $u^{n+1/2}$, v^{n+1} в уравнении (3.308б). Поскольку u и v определяются через функцию тока ψ, которая в свою очередь находится из эллиптического уравнения $\nabla^2\psi = \zeta$, в этом случае требуется совместно решать уравнения для ζ и для ψ на слоях $n + 1/2$ и $n + 1$, что совсем нереально. Если же в схеме всюду использовать старые значения u^n и v^n, как в работе Сона и Ханратти [1969], то схема будет иметь формальную точность $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$; если же поле скоростей меняется слабо, то в линеаризованной системе остается кое-что от второго порядка точности[1]). Брили [1970] по вычисленным значениям u^n и v^n и по ранее вычисленным u^{n-1} и v^{n-1} линейной экстраполяцией определял $u^{n+1/2}$ и $v^{n+1/2}$. Такая схема устойчива и, как оказалось, имеет второй порядок точности. Однако она требует дополнительной памяти для хранения значений ψ^{n-1}.

Можно также проводить полную итерационную процедуру (Пирсон [1965], Азиз и Хеллумс [1967]): из уравнения (3.308)

[1]) Это аналогично тому случаю, когда во второй схеме с разностями против потока, формально имеющей точность $O(\Delta x)$, остается кое-что от второго порядка точности при расчете конвективного поля, если ζ слабо меняется в зависимости от пространственной переменной (см. разд. 3.1.11).

с u^n и v^n найти первое приближение $\overline{\zeta^{n+1}}$, а затем из уравнения $\nabla^2\psi = \overline{\zeta^{n+1}}$ определить первое приближение $\overline{u^{n+1}}$ и $\overline{v^{n+1}}$. На второй итерации конвективные члены в уравнении (3.308) можно брать как средние $u = {}^1/_2(u^n + \overline{u^{n+1}})$ и т. п. Итерации можно закончить на этом или продолжать до $(k+1)$-й итерации, т. е. до тех пор, пока не будет выполняться условие $(u^{n+1})^{k+1} = (u^{n+1})^k$; в любом случае ошибка будет иметь порядок $O(\Delta t^2)$, как и в схеме (3.285); см. разд. 3.1.15. При одной итерации объем вычислений на одном временно́м шаге удваивается, и требуется дополнительная память для хранения ψ^{n+1}.

Другая возможная процедура заключается в том, что после решения уравнения (3.308а) вычисляется функция тока $\psi^{n+1/2}$ и получаемые из нее значения $u^{n+1/2}$, $v^{n+1/2}$ подставляются в уравнение (3.308б). Это приводит к линеаризации только на первом полушаге. Такая процедура может оказаться более точной, чем процедура линеаризации по значениям u^n и v^n, и не требует дополнительной памяти как схема со строго вторым порядком точности, поскольку здесь нет необходимости различать в памяти ψ^n и $\psi^{n+1/2}$. (То есть ψ^n и $\psi^{n+1/2}$ имеют одинаковые идентификаторы в программе). Азиз и Хеллумс [1967] исследовали эти разновидности схем. Как и следовало ожидать, схема со строго вторым порядком точности (ψ^n и $\psi^{\overline{n+1}}$) оказалась точнее, но для решения трехмерной задачи эти авторы применяли последнюю схему (ψ^n и $\psi^{n+1/2}$), потому что объем используемой памяти в этом случае был на пределе.

В этих схемах итерации, необходимые для достижения второго порядка точности и для нелинейных членов, не обязательно связаны с дополнительной работой, так как они могут потребоваться и при численной реализации граничных условий. Одним из недостатков неявных схем метода чередующихся направлений, так же как и других неявных схем, является необходимость иметь граничные значения для ζ^{n+1}. Вдоль некоторых границ можно задать условия для ζ^{n+1}, допускающие неявное решение. Но на стенке с условием прилипания значения ζ_w на этой границе зависят от значений ψ во внутренних точках (такие возможные зависимости будут обсуждаться в разд. 3.3.2). Поэтому для определения значения ζ_w^{n+1} на стенке требуется неявное решение уравнения $\nabla^2\psi^{n+1} = \zeta^{n+1}$. Таким образом, полная неявная задача при наличии граничного условия прилипания практически не поддается расчету даже при линеаризации скоростей по значениям u^n и v^n.

Возможные процедуры расчета граничных значений ζ_w^{n+1} идентичны рассмотренным выше возможным процедурам для u и v. Для значений на стенке можно принять $\zeta_w^{n+1} = \zeta_w^n$, и в этом случае значения ζ на стенке будут отставать на Δt от значений во внутренних точках. Такая схема использовалась в работе Уилкса и Черчилла [1966]. При малых Δt эта аппроксимация достаточно точна, но ведь основное преимущество неявных схем метода чередующихся направлений — возможность счета с большими шагами Δt. При больших Δt такая схема может оказаться не только не точной, но и дестабилизирующей. Решение при помощи итераций, как и при нахождении решения ψ^{n+1}, очевидно, оказывается предпочтительнее.

При использовании неявных схем метода чередующихся направлений для расчета течений при больших Re (или при больших числах Грасгофа для течений со свободной конвекцией) многие исследователи обнаруживали вычислительную неустойчивость (или, возможно, очень малую скорость сходимости итераций). Они либо не смогли получить решение при больших Re (напрпмер, Парис и Уитекер [1965], Торранс [1968]), либо были вынуждены осреднять с весом рассчитанные данные на старом и новом слоях по времени (Пирсон [1965а]), что эквивалентно уменьшению Δt, либо переходили к схемам с разностями против потока для конвективных членов (Бао и Догерти [1969]), что в некоторой степени было эквивалентно уменьшению Re (см. разд. 3.1.8). Было неясно, чем обусловливалась потеря сходимости: медленной сходимостью линеаризованной задачи, нелинейной неустойчивостью уравнений во внутренних точках, отставанием ζ_w^n на Δt в одношаговой процедуре, недостаточной степенью сходимости ζ_w^{n+1} в итерационной процедуре или видом уравнения, используемого для расчета ζ_w по значениям ψ во внутренних точках. Определяющими оказались две последние причины, и в свете работы Брили [1970] возникающие здесь затруднения могут быть разрешены.

Затруднения, описанные Уилксом и Черчиллом [1966], связаны как с отставанием ζ_w по времени (т. е. с тем, что его значение берется с предшествующего слоя), так и с частным видом разностного уравнения второго порядка точности, используемого для ζ_w. Результаты Брили, относящиеся к граничным условиям для ζ_w, будут приведены в разд. 3.3.2. Сэмюелс и Черчилл [1967] вернулись к уравнению первого порядка точности для ζ_w, которое не приводит к неустойчивости, благодаря чему им удалось продолжить расчеты авторов предшествующей работы для больших чисел Грасгофа до тех пор, пока отставание ζ_w на Δt не приводило к неустойчивости.

Степень сходимости ζ_w, требуемая для получения устойчивого решения, зависит прежде всего от самой задачи. При больших Δt сходимость может нарушаться из-за нелинейности. Очевидно, что при фиксированном числе итераций требуется меньший шаг Δt для достижения одной и той же точности сходимости итераций, т. е. одной и той же величины ε в критерии сходимости $\left(\zeta_w^{n+1}\right)^{k+1} = \left(\zeta_w^{n+1}\right)^k + \varepsilon$. Торранс [1968] (см. также Брили [1970], Брили и Уоллс [1971]) обнаружил, что условие сходимости для значения вихря на стенке в действительности накладывает ограничение на величину шага по времени вида $\Delta t \leqslant a/\Delta x^2$, где a — некоторое число, зависящее от задачи и от требований сходимости. Несмотря на то что метод фон Неймана указывает на безусловную устойчивость рассматриваемой схемы, оказывается, что неявное определение значений ζ_w на стенке фактически приводит к ограничению на величину шага по времени, которое аналогично ограничению, имеющему место для простейшей явной схемы с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственным переменным. Такое поведение присуще не только неявным схемам метода чередующихся направлений, но и всем неявным схемам.

Хотя преимущества неявных схем метода чередующихся направлений над явными схемами практически не таковы, как это следует из анализа при помощи метода фон Неймана, опыт многих исследователей показывает, что неявные схемы метода чередующихся направлений допускают бóльшие по величине размеры шагов по времени, ускоряют расчет в целом (вдвое и более) и, кроме того, дают возможность получить второй порядок точности по времени. Можно быть уверенным в том, что для простых прямоугольных областей такие схемы будут широко применяться и в дальнейшем. В случае же областей неправильной формы программирование для этих схем может усложниться и более практичными могут оказаться явные схемы.

Для успешного распространения основной неявной схемы метода чередующихся направлений (3.308) на случай трех пространственных переменных нужно принять во внимание некоторые тонкости. В наиболее очевидной схеме в этом случае надо выполнить три вычислительных шага с двумя промежуточными шагами при $t + \Delta t/3$ и $t + 2\Delta t/3$. Эта схема уже не обладает ни вторым порядком точности по времени, ни безусловной устойчивостью (Рихтмайер и Мортон [1967]) и неустойчива при $d > {}^3/_2$ (Карнахан с соавторами [1969]). Продемонстрируем такое распространение схемы на случай трехмерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right). \tag{3.311}$$

Дуглас [1962] предложил следующую трехшаговую схему (верхние индексы * и ** относятся к промежуточным значениям, вычисленным с помощью алгоритма прогонки):

$$\frac{\zeta^* - \zeta^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^* + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta y^2} + \alpha \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta z^2}, \tag{3.312а}$$

$$\frac{\zeta^{**} - \zeta^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^* + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^{**} + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta z^2}, \tag{3.312б}$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^* + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2}{\delta y^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^{**} + \zeta^n)\right] + \alpha \frac{\delta^2}{\delta z^2}\left[\frac{1}{2}(\zeta^{n+1} + \zeta^n)\right]. \tag{3.312в}$$

Схема имеет порядок точности $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$ и безусловно устойчива. Эта процедура может быть обобщена и на случай большего числа переменных. Дуглас и Ракфорд [1956], Дуглас и Ганн [1964] и Брайен [1961] предложили другие неявные схемы метода чередующихся направлений в случае трех пространственных переменных (см. также Карнахан с соавторами [1969]). Еще раз отметим, что казалось бы правдоподобные обобщения здесь часто оказываются неверными. Если в члене $\delta^2/\delta x^2$ в уравнении (3.312в) вместо ζ^* использовать последнее приближенное значение ζ^{**}, то, как показали Рихтмайер и Мортон [1967], безусловная устойчивость схемы будет утрачена.

Азиз и Хеллумс [1967] с успехом использовали трехмерные неявные схемы метода чередующихся направлений для полного уравнения, включающего конвективный и диффузионный члены. Мак-Ки и Митчелл [1970] рассмотрели неявные схемы чередующихся направлений для задач со смешанными производными по координатам $\partial^2\zeta/\partial x\,\partial y$. Келлог [1969] исследовал неявную схему метода чередующихся направлений для нелинейного уравнения диффузии с нелинейным граничным условием. Применение неявных схем метода чередующихся направлений для уравнения диффузии в случае переменного шага пространственной сетки и граничных условий общего вида рассмотрел Спеньер [1967]. Общее обсуждение метода проводится в работе Видлунда [1967]. Густафсон [1971] предложил неявную схему метода чередующихся направлений для уравнений мелкой воды. Гурли и Митчелл [1969а] установили эквивалентность некоторых неявных схем метода чередующихся направлений и «локально одномерных» схем (см. также Митчелл [1969]). Ричардс [1970] использовал неявную схему метода чередующихся направлений для уравнения переноса вихря в цилиндрической системе координат. См. также работы Пиачека [1968, 1969б].